Математическая байга, 3 класс, решение

1. *На доске было написано число, в котором все цифры расположены по убыванию. Джон посчитал сумму его цифр и получил 15. Затем он стер первую цифру данного числа и написал на ее место цифру 3. После этого он посчитал произведение цифр нового числа и получил 36. Какое число могло быть написано на доске Джоном в самом начале?* ***Укажите все варианты.***

Ответ: $8322, 843, 762, 7431, 73221, 6621, 64311, 632211, 543111, 5322111, 4431111, 43221111, 332211111$.

Решение.

1) Произведение нестёртых цифр равно 12. 12 может быть получено как произведение 3, 4, и, возможно, нескольких единиц, или 3, 2, 2 и, возможно, нескольких единиц, или 6, 2 и, возможно, нескольких единиц.

2) Следовательно, первая цифра не меньше 3, и сумма цифр, отличных от единицы, будет не меньше $3 + 7 = 10$. Поэтому количество единиц не превосходит $15 - 10 = 4$.

3) Если среди нестёртых чисел нет единиц, тогда

a) либо нестёртыми остались цифры 6 и 2, а стёрли цифру $15 - 6 - 2 = 7$, и исходное число равно 762;

b) либо нестёртыми остались цифры 4, 3, а стёрли цифру $15 - 3 - 4 = 8$, и исходное число равно 843;

c) либо нестёртыми остались цифры 3, 2 и 2, а стёрли цифру $15 - 3 - 2 - 2 = 8$, и исходное число равно 8322.

4) Если среди нестёртых чисел была только одна единица, то

a) либо нестёртыми остались цифры 6, 2 и 1, а стёрли цифру $15 - 6 - 2 - 1 = 6$, и исходное число равно 6621;

b) либо нестёртыми остались цифры 4, 3 и 1, а стёрли цифру $15 - 4 - 3 - 1 = 7$, и исходное число равно 7431;

c) либо нестёртыми остались цифры 3, 2, 2 и 1, а стёрли цифру $15 - 3 - 2 - 1 = 7$, и исходное число равно 73221.

5) Если среди нестёртых чисел была только две единицы, то

a) либо нестёртыми остались цифры 6, 2, 1 и 1, а стёрли цифру $15 - 6 - 2 - 1 - 1 = 5$, и исходное число равно 56211, но оно не удовлетворяет условию;

b) либо нестёртыми остались цифры 4, 3, 1 и 1, а стёрли цифру $15 - 4 - 3 - 1 - 1 = 6$, и исходное число равно 64311;

c) либо нестёртыми остались цифры 3, 2, 2, 1 и 1, а стёрли цифру $15 - 3 - 2 - 1 - 1 = 6$, и исходное число равно 632211.

6) Если среди нестёртых чисел была три единицы, то

a) либо нестёртыми остались цифры 6, 2, 1, 1 и 1, а стёрли цифру $15 - 6 - 2 - 1 - 1 - 1 = 4$, и исходное число равно 462111, но оно не удовлетворяет условию;

b) либо нестёртыми остались цифры 4, 3, 1, 1 и 1, а стёрли цифру $15 - 4 - 3 - 1 - 1 - 1 = 5$, и исходное число равно 543111;

c) либо нестёртыми остались цифры $3, 2, 2, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-3-$ $-2-1-1-1=5$, и исходное число равно 5322111.

7) Если среди нестёртых чисел было четыре единицы, то

a) либо нестёртыми остались цифры $6, 2, 1, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-6-2-1-1-1-1=3$, и исходное число равно 3621111, но оно не удовлетворяет условию;

b) либо нестёртыми остались цифры $4, 3, 1, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-4-3-1-1-1-1=4$, и исходное число равно 4431111;

c) либо нестёртыми остались цифры $3, 2, 2, 1, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-3-2-1-1-1-1=4$, и исходное число равно 43221111.

8) Если среди нестёртых чисел было пять единиц, то

a) либо нестёртыми остались цифры $6, 2, 1, 1, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-6-2-1-1-1-1-1=2$, и исходное число равно 26211111, но оно не удовлетворяет условию;

b) либо нестёртыми остались цифры $4, 3, 1, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-4-3-1-1-1-1-1=3$, и исходное число равно 34311111;

c) либо нестёртыми остались цифры $3, 2, 2, 1, 1, 1$ и 1, а стёрли цифру $15-3-2-1-1-1-1-1=3$, и исходное число равно 332211111.

9) Таким образом, получаются следующие варианты для числа, которое было написано Джоном в самом начале: $8322, 843, 762, 7431, 73221, 6621, 64311, 632211,$ $543111, 5322111,$ $4431111,$ $43221111, 332211111$.

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

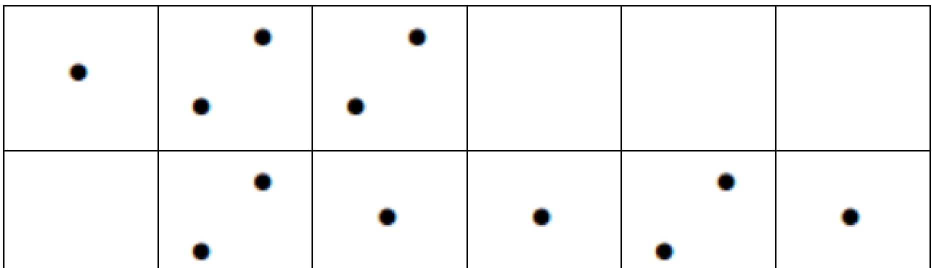
8 баллов –. ученик дает правильный ответ и приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик дает частично правильный ответ (не менее трёх правильных), но не может объяснить решение даже после нескольких вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

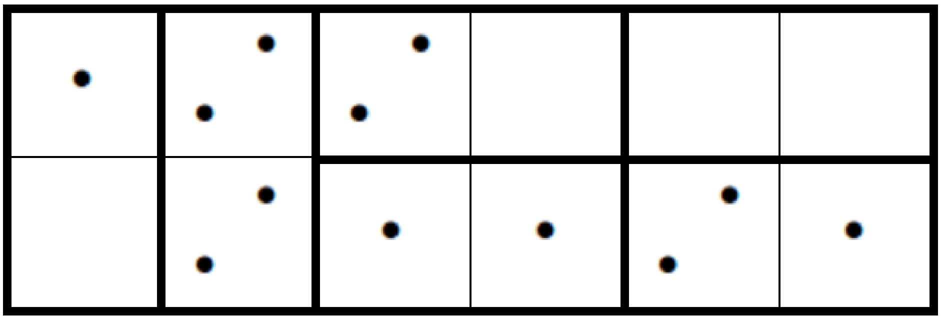
6 баллов – учащийся не смог привести правильный ответ даже после нескольких вопросов жюри, но приводит идеи, которые помогают решить задачу. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

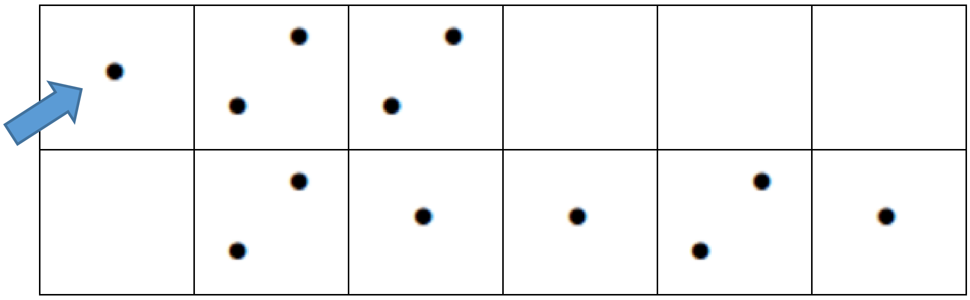
2. *Доминошки* $0-0$; $0-1$; $0-2$; $1-1$; $1-2$; $2-2$ *выложили так, как показано на рисунке. Укажите границы доминошек. Ответ объясните.*



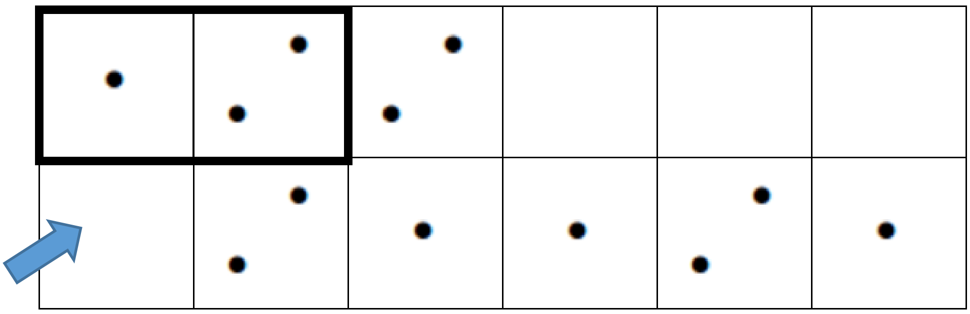
Ответ:



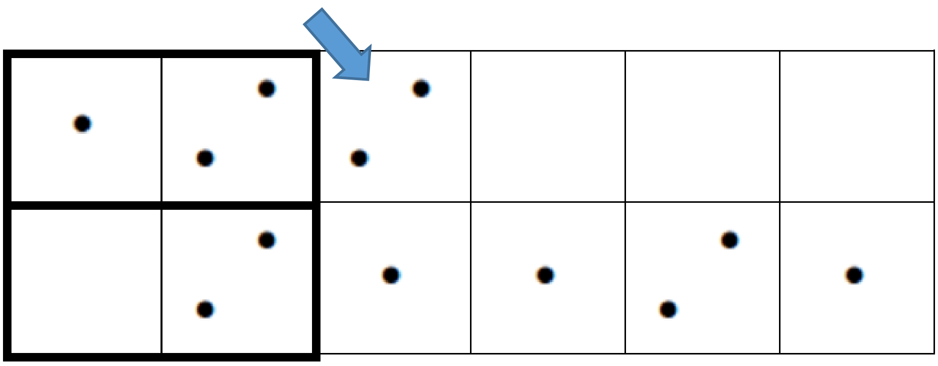
Решение. Самую левую верхнюю клетку (указана стрелкой) доминошка может покрыть либо горизонтально, либо вертикально.



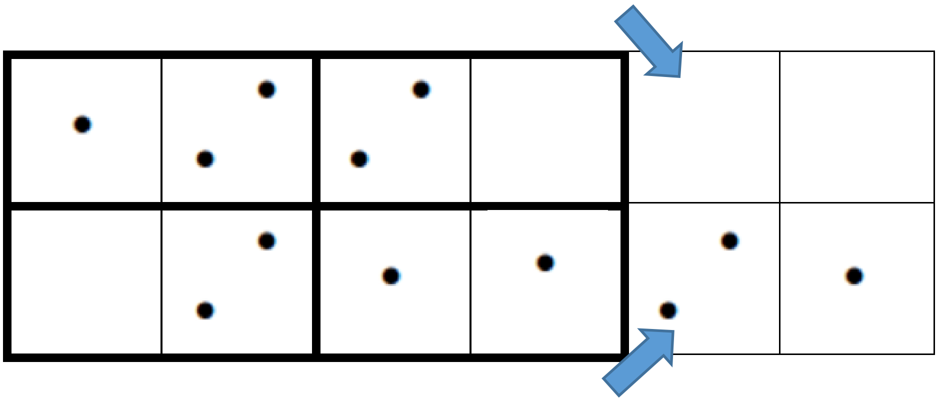
Случай 1. Рассмотрим случай, когда эта клетка покрыта горизонтально.



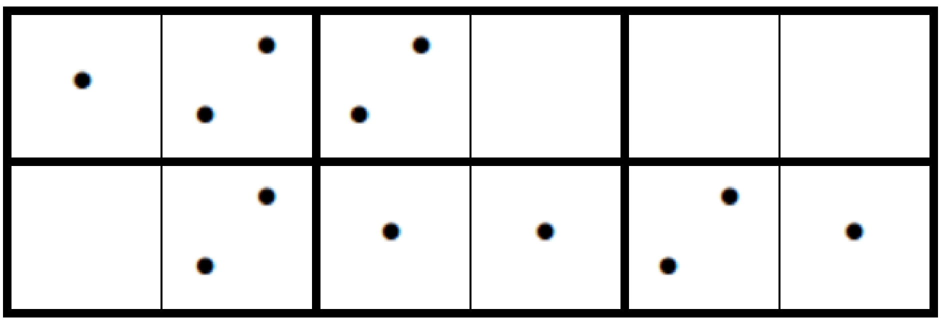
Тогда клетка, на которую указывает стрелка также будет покрыта доминошкой горизонтально.



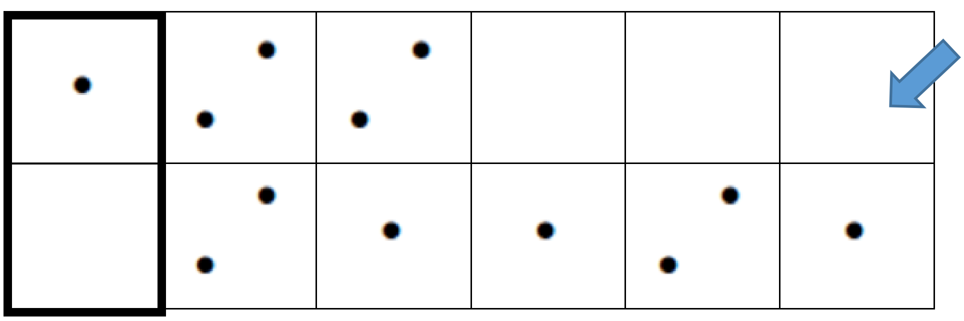
Теперь посмотрим как может быть покрыта клетка, указанная стрелкой. Она не может быть покрыта вертикально, так как тогда получится доминошка $1-2$, но доминошка$1-2$ уже покрывает самый левый верхний угол. Значит, клетка, на которую указывает стрелка, покрыта доминошкой горизонтально. То же самое можно сказать и про клетку, которая находится непосредственно под ней. В результате получим



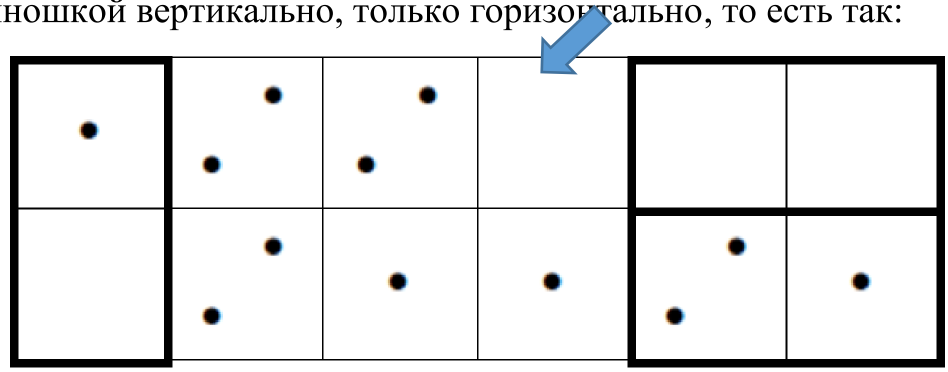
Доимношка $0-2$ уже использована, поэтому клетки, на которые указывают стрелки, могут быть покрыты только горизонтаольно, как показано на рисунке ниже.



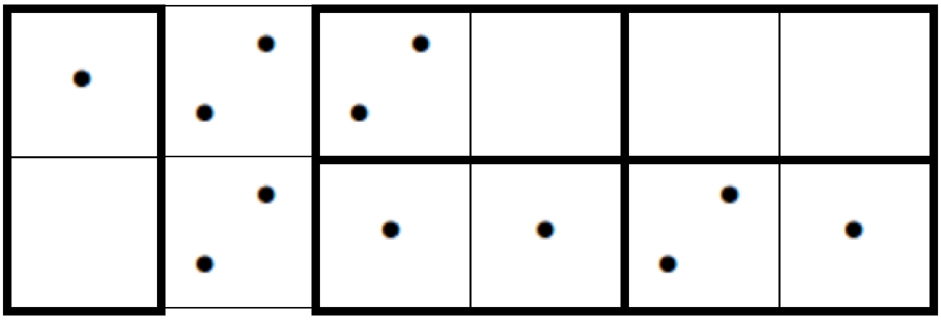
Но при данном покрытии доминошка $1-2$ использована дважды, а доминшка $0-1$ не использована вообще.
Таким образом **Случай 1** невозможен.
Случай 2. Пусть самая левая верхняя клетка покрыта вертикально.



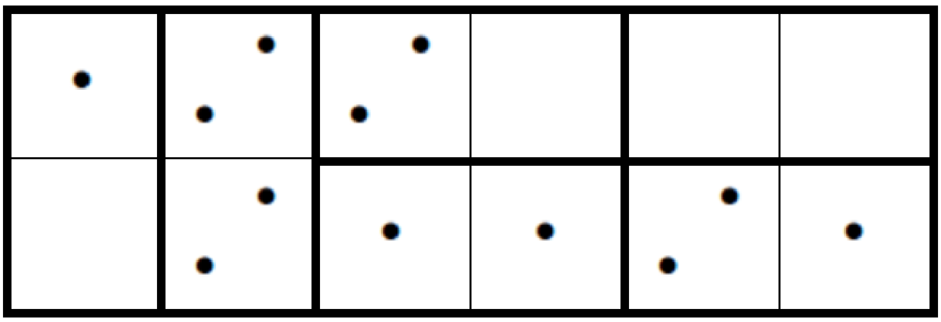
Таким образом, доминошка $0-1$ уже использована. Поэтому клетка, на которую указывает стрелка, и клетка под ней не могут быть покрыты доминошкой вертикально, только горизонтально, то есть так:



По тем же причинам клетка, на которую указывает стрелка и клетка под ней могут быть покрыты доминошкой только горизонтально Иначе получится. Что доминошка $0-1$ будет использована дважды. Итак, получается



Для оставшейся доминошки $2-2$ остаётся единственный вариант расположения:



В итоге получаем требуемое покрытие.

Критерии:
10 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.
9 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.
8 баллов –. ученик дает правильный ответ и приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.
7 баллов – ученик дает правильный ответ, но упускает один из случаев и не может довести решение до конца, даже после нескольких дополнительных вопросов жюри.

6 баллов – учащийся не смог привести правильный ответ даже после нескольких вопросов жюри, но приводит идеи, которые помогают решить задачу. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

3. *Кайрат и Максат по очереди расставляют крестики-нолики (Кайрат – крестики, Максат – нолики) длиной на клетчатой полосе шириной в одну клетку и длиной в* 10 *клеток. Игрок проигрывает, если после его хода в каких-то двух соседних клетках оказывается крестик и нолик. Кто из игроков гарантирует себе победу при правильной игре? Объясните, как он должен действовать, чтобы гарантировать себе победу*.

Ответ: Кайрат.

Решение. Своим первым ходом Кайрат должен поставить крестик в одну из двух центральных клеток. Максат не может поставить свой нолик во вторую центральную клетку. Затем Кайрат должен симметрично ходы Максата. Если Максат может сделать ход, то и Кайрат, соответственно, тоже. Так как количество клеток конечно, то в какой-то момент Максат сделает ход, который приведёт к проигрышу.

Для жюри: Прежде, чем принимайть решение, сыграйте с учеником в эту игру три раза, после этого ученик может рассказать своё решение.

Критерии:

10 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри три раза и объясняет выигрышную стратегию без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри три раза и объясняет выигрышную стратегию только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов –. ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри хотя бы два раза и объясняет выигрышную стратегию только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри хотя бы два раза, но не может объяснить, какой должна быть выиграшная стратегия Кайрата даже после нескольких дополнительных вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

6 баллов – ученик даёт правильный ответ, выигрывает у жюри хотя бы один раз, но не может объяснить, какой должна быть выиграшная стратегия Кайрата даже после нескольких дополнительных вопросов жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

5 баллов – учащийся не может выиграть у жюри. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

4. *Несколько человек зашли в пиццерию. Каждый голодный сказал, что намерен съесть* 6 *или* 7 *кусочков пиццы, а каждый сытый – что он съесть* 2 *или* 3 *кусочка. Услышав это, официант сообразил, что* 48 *кусочков пиццы не хватит, а* 60 *– заведомо будет достаточно. Сколько человек зашли в пиццерию?*

Ответ: 9 *человек (*8 *голодных и* 1 *сытый).*

Решение.

1) Голодных в этой компании было не более 8, так как 9 голодных могут захотеть съесть $7 \cdot 9 = 63 > 60$ кусков пиццы.
2) а) Пусть **не было голодных**, тогда сытых было не больше 20 (иначе $21 \cdot 3 = 63$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 25 (иначе $2 \cdot 24 = 48$, и 48 кусков может хватить), что невозможно.

б) Пусть **голодный был один**, тогда он съел или 6 или 7 кусочков пиццы. В этом случае сытых не более 17 (иначе $7 + 18 \cdot 3 = 61$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 22 (иначе $6 + 2 \cdot 21 = 48$, и 48 кусков может хватить). Эта ситуация невозможна.

в) Пусть было **два голодных**. Вместе они съели от $2 \cdot 6 = 12$ до $2 \cdot 7 = 14$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 15 (иначе $2 \cdot 7 + 16 \cdot 3 = 62$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 19 (иначе $2 \cdot 6 + 18 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить). Противоречие.

г) Пусть было **три голодных**. Вместе они съели от $3 \cdot 6 = 18$ до $3 \cdot 7 = 21$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 13 (иначе $3 \cdot 7 + 14 \cdot 3 = 63$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 16 (иначе $3 \cdot 6 + 15 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить). Опять невозможная ситуация.

д) Пусть было **четыре голодных**. Вместе они съели от $4 \cdot 6 = 24$ до $4 \cdot 7 = 28$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 10 (иначе $4 \cdot 7 + 11 \cdot 3 = 61 > 60$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 13 (иначе $4 \cdot 6 + 11 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить), что невозможно.

е) Пусть было **пять голодных**. Вместе они съели от $5 \cdot 6 = 30$ до $5 \cdot 7 = 35$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 8 (иначе $5 \cdot 7 + 9 \cdot 3 = 62$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 10 (иначе $5 \cdot 6 + 9 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить), что опять невозможно.

ж) Пусть было **шесть голодных**. Вместе они съели от $6 \cdot 6 = 36$ до $6 \cdot 7 = 42$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 6 (иначе $6 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 63$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 7 (иначе $6 \cdot 6 + 5 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить), что невозможно.

з) Пусть было **семь голодных**. Вместе они съели от $7 \cdot 6 = 42$ до $7 \cdot 7 = 49$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 3 (иначе $7 \cdot 7 + 4 \cdot 3 = 61$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 4 (иначе $7 \cdot 6 + 3 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить). Получили противоречие.

3) Пусть было **восемь голодных**. Вместе они съели от $8 \cdot 6 = 48$ до $8 \cdot 7 = 56$ кусков пиццы. Тогда сытых было не более 1 (иначе $8 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 62$, 60 кусочков может не хватить) и не менее 1 (иначе $8 \cdot 6 + 0 * 2 = 48$, и 48 кусков может хватить). Таким образом, в пиццерию зашли 9 человек (8 голодных и 1 сытый).

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ и приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ченик даёт правильный ответ, доказывает, больше 8 голодных быть не может, в процессе решения неправильно рассмотрел или упустил не более трёх подпунктов пункта 2 доказательства но смог закрыть дыру в доказательстве после некскольких вопросов жюри.

8 баллов – ученик даёт правильный ответ, доказывает, больше 8 голодных быть не может, но в процессе решения неправильно рассмотрел или упустил не более трёх подпунктов пункта 2 доказательства и не смог закрыть дыру в даже после нескольких вопросов жюри.

7 баллов – даёт правильный ответ, доказывает, что больше 8 голодных быть не может, но не может объяснить, почему другие случаи невозможны, даже после нескольких вопросов жюри.

6 баллов – даёт правильный ответ, но не может объяснить, как он его получил даже после нескольких вопросов жюри.
5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.

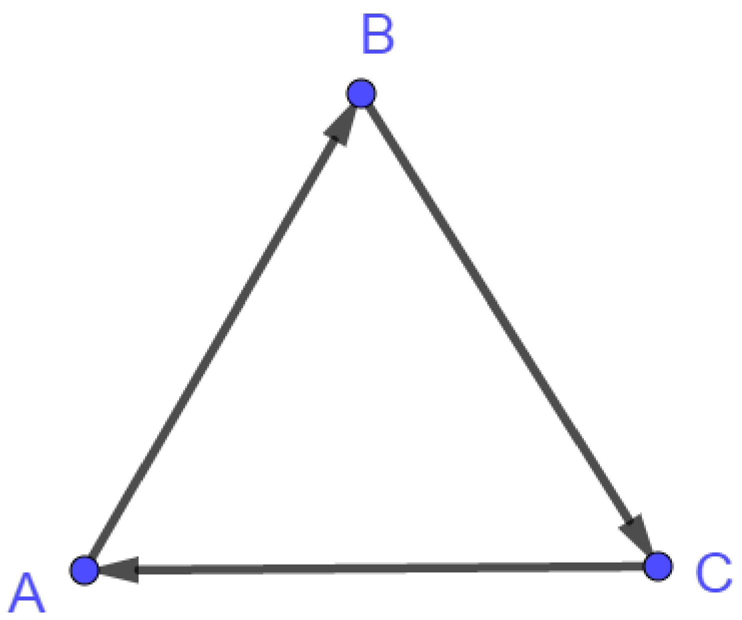
5. *На планете Урап проходил однокруговой турнир по волейболу (каждая команда сыграла с каждой). По правилам волейбола игра не могла окончиться ничьей. Когда подвели итоги турнира, оказалось, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и все побеждённые её команды вместе. Известно также, что команд было не более* 5. *Сколько команд участвовало в турнире?*

Ответ: 3 или 4.

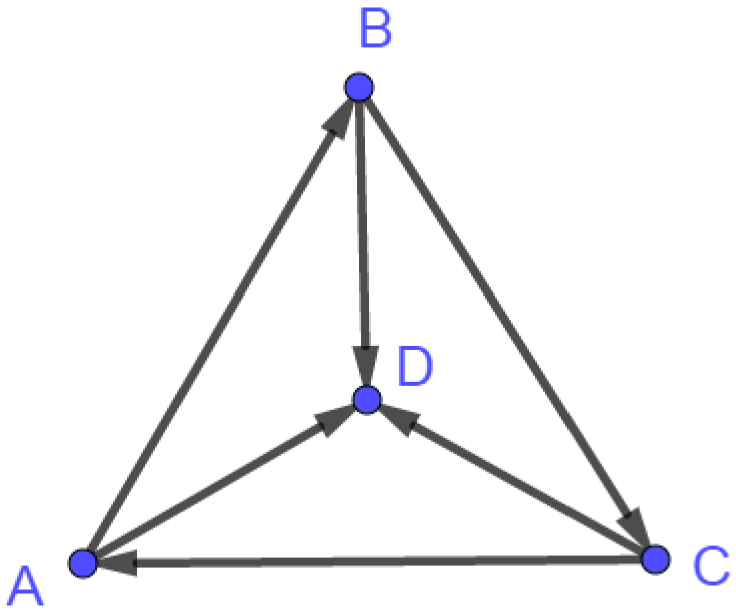
Решение.

4) Две команды в турнире не могло быть, так как в этом турнире

5) Пример для 3 команд A, B, C: $A \to B, B \to C, C \to A$ (стрелочка направлена от выигравшей команды, к побеждённой). Каждая команда выиграла ровно у одной команды.



6) Пример для 4 команд A, B, C: $A \to B, B \to C, C \to A, A \to D, B \to D, C \to D$ (возможны другие варианты).



7) Пусть команд было 5. Всего в турнире было проведено $4+3+2+1=10$ игр. То есть разыгрывалось 10 очков (за победу в волейболе даётся 1 очко, за поражение 0 очков). Допустим, что какая-то команда выиграла у всех остальных команд, то есть одержала 4 победы. Тогда побеждённые команды в общей сложности должны одержать 4 победы, то есть набрать в сумме 4 очка. Но эти 4 команды в сумме набирают $10-4=6$ очков. Противоречие. Значит, каждая команда набрала не более 3 очков.

8) Пусть кто-то из этих 5 команд набрал 3 очка. Назовём эту команду A. Команда A набрала 3 очка, выиграв у команд B, C и D. Команды B, C и D набрали в сумме 3 очка, и на оставшуюся команду E приходится $10-3-3=4$ очка, но это невозможно (в пункте 4 показано, что ни одна команда не может набрать 4 очка).

9) Значит, каждая команда из этих пяти набрала не более 2 очков. Так как всего разыгрывается 10 очков, то ни одна команд не могла набрать меньше 2 очков, иначе общая сумма очков будет меньше 10. То есть все команды набрали по 2 очка.

10) Рассмотрим команду A. Она одержала 2 победы, допустим, против B и C, но эти команды также одержали по две победы и в сумме набрали 4 очка, а по условию должны были 2. Противоречие.

11) Таким образом, 5 команд в турнире участвовать не могло.

Критерии:

10 баллов – ученик дает правильный ответ, показывает примеры турниров для 3-х и 4-х команд, приводит полное решение без дополнительных вопросов жюри.

9 баллов – ученик дает правильный ответ, показывает примеры турниров для 3-х и 4-х команд и приводит полное решение только после одного-двух дополнительных вопросов жюри.

8 баллов –. ученик дает правильный ответ, показывает примеры турниров для 3-х и 4-х команд и приводит полное решение только после нескольких дополнительных вопросов жюри.

7 баллов – ученик дает правильный ответ с примерами, но не может объяснить почему другие варианты невозможны, даже после нескольких наводящих вопросов жюри.
6 баллов – ученик даёт ответ 3 или 4 с примером, но не может объяснить почему другие варианты невозможны, даже после нескольких вопросов жюри.
5 баллов – все рассуждения учащегося и ответ были неправильными. Жюри объяснило решение, учащийся его понял.